



TITLE:

凸ゲームと準凸ゲームに関する未
解決問題について (ゲーム理論、数
理経済学への離散凸解析の応用)

AUTHOR(S):

穂刈, 享; 内田, 誠吾

CITATION:

穂刈, 享 ...[et al]. 凸ゲームと準凸ゲームに関する未解決問題について
(ゲーム理論、数理経済学への離散凸解析の応用). 数理解析研究所講究
録 2004, 1371: 116-124

ISSUE DATE:

2004-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25478>

RIGHT:

凸ゲームと準凸ゲームに関する未解決問題について

筑波大学社会科学系講師 穂刈 享 (Toru Hokari)
 筑波大学社会科学系技官 内田誠吾 (Seigo Uchida)
 Institute of Social Sciences
 University of Tsukuba

潜在的なプレイヤーの集合として自然数の集合 N を考える. N の空でない有限部分集合の全体を \mathcal{N} で表す. 所与の $N \in \mathcal{N}$ に対し, 関数 $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ で $v(\emptyset) = 0$ を満たすものを N をプレイヤーの集合とする TU ゲーム (以下では単にゲーム) という. 標準的な解釈においては, 任意の $S \in 2^N$ に対して $v(S)$ は「グループ S のメンバーが協力した場合に, $N \setminus S$ のメンバーの何の協力もなしに獲得できる総利得の最大値」を表すものとされる.

次の条件を満たすゲームを凸ゲーム (Shapley [15]) という: 任意の $i \in N$ と任意の $S, T \in 2^N$ に対して,

$$i \in S \subset T \Rightarrow v(S) - v(S \setminus \{i\}) \leq v(T) - v(T \setminus \{i\}).$$

また, 次の条件を満たすゲームを準凸ゲーム (Sprumont [16]) という: 任意の $S, T \in 2^N$ に対して,

$$\emptyset \neq S \subset T \Rightarrow \sum_{i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \leq \sum_{i \in S} [v(T) - v(T \setminus \{i\})].$$

以下では N をプレイヤーの集合とする凸ゲームと準凸ゲームの集合をそれぞれ $\mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と $\mathcal{V}_{\text{準凸}}^N$ のように表記することにする. 定義から明らかなように, すべての凸ゲームは準凸ゲームでもある. 様々な資源配分問題や費用分担問題が凸ゲームとして表されることが知られている.¹ 凸ゲームとしては表せないが準凸ゲームとしてなら表せるような資源配分問題・費用分担問題の例も幾つかある.²

凸ゲームの集合 $\bigcup_{N \in \mathcal{N}} \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ を定義域とする写像 φ で次の条件を満たすものを凸ゲーム上の配分ルールという: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ に対して,

$$\emptyset \neq \varphi(v) \subset \mathbb{R}^N \text{ かつ } \text{任意の } x \in \varphi(v) \text{ に対して } \sum_{i \in N} x_i \leq v(N).$$

配分ルールが single-valued である場合には $\{x\} = \varphi(v)$ ではなく $x = \varphi(v)$ と表記することにする. 準凸ゲーム上の配分ルールも同様に定義される.

いわゆる「協力ゲームの公理的分析」は, 配分ルールが満たすことが望ましいような諸性質をそれぞれ公理として定式化し, 複数の公理の両立可能性や公理間の論理的関係などを考察することを主たる目的としている.

¹この点については Topkis [19] が詳しい.

²例えば Driessen and Meinhardt [2] を参照.

以下では各公理を凸ゲーム上の配分ルールの性質として定義するが、準凸ゲーム上での各公理も同様に定義される。

Efficiency: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と任意の $x \in \varphi(v)$ に対して $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Symmetry: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と任意の $i, j \in N$ と任意の $x \in \varphi(v)$ に対して,

$$\left[\text{任意の } S \subseteq N \setminus \{i, j\} \text{ に対して } v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \right] \Rightarrow x_i = x_j.$$

Individual rationality: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と任意の $x \in \varphi(v)$ と任意の $i \in N$ に対して $x_i \geq v(\{i\})$.

N をプレイヤーの集合とする任意のゲーム $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ と任意の $N' \subset N$ に対して、 v の定義域を $2^{N'}$ に制限したものを v の N' に関する部分ゲームといい、これを $v_{N'}$ と表記する。

次の公理は single-valued の配分ルールの性質で、任意のゲームにおける各プレイヤーの利得は、そのゲームの部分ゲームにおける利得よりも小さくなることはないというものである。

Population-monotonicity: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と任意の $N' \subset N$ と任意の $i \in N'$ に対して $\varphi_i(v_{N'}) \leq \varphi_i(v)$.

凸ゲーム上の配分ルールの中で population-monotonicity を満たすものの例としては、Shapley 配分ルール (Shapley [14]) と Fujishige-Dutta-Ray 配分ルール (Fujishige [5]; Dutta and Ray [4]) の2つがある。³

Shapley 配分ルール: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と任意の $i \in N$ に対して,

$$Sh_i(v) \equiv \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!} \cdot [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Fujishige-Dutta-Ray 配分ルール: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ に対して、 $FDR(v) \in \mathbb{R}^N$ は以下のアルゴリズムによって定義される:

Step 1. $N_1 \equiv N$, $v_1 \equiv v$ とする. $\frac{v_1(S)}{|S|}$ が最大となる空でない $S \in 2^{N_1}$ の中で $|S|$ が最大のものを S_1 とする.⁴ 任意の $i \in S_1$ に対して、 $FDR_i(v) \equiv \frac{v_1(S_1)}{|S_1|}$ とする.

³Shapley value は通常「シャープレイ値」と訳される。Fujishige-Dutta-Ray 配分ルールについては、Dutta and Ray [4] が “egalitarian solution” という名前で導入した配分ルールが、実は凸ゲーム上では Fujishige [5] で考察されている “lexicographically optimal base” と実質的に一致することから本稿ではこの名前を用いることにした。

⁴ゲームの凸性から S_1 が一意に決まることを示すことができる。

Step k . $N_{k-1} \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ と $v_{k-1} \in \mathcal{V}_{\square}^{N_{k-1}}$ と $S_{k-1} \in 2^{N_{k-1}} \setminus \{\emptyset, N_{k-1}\}$ が既に定義されていると仮定する. $N_k \equiv N_{k-1} \setminus S_{k-1}$ とし, 任意の $S \in 2^{N_k}$ に対して, $v_k(S) \equiv v_{k-1}(S \cup S_{k-1}) - v_{k-1}(S_{k-1})$ とする. $\frac{v_k(S)}{|S|}$ が最大となる空でない $S \in 2^{N_k}$ の中で $|S|$ が最大のものを S_k とする.⁵ 任意の $i \in S_k$ に対して, $FDR_i(v) \equiv \frac{v_k(S_k)}{|S_k|}$ とする.

Single-valued ではない配分ルール例としてはコアがある.

コア: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\square}^N$ に対して,

$$C(v) \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ and for each } S \in 2^N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \right\}.$$

準凸ゲームに関する2つの予想

N をプレイヤーの集合とするゲーム v を所与としたとき, 次の条件を満たすベクトルのリスト $x = (x^S)_{S \in 2^N}$ のことを v の **population-monotonic allocation scheme** という:

- (i) 任意の $S \in 2^N$ に対して $x^S \in \mathbb{R}^S$ かつ $\sum_{i \in S} x_i^S = v(S)$;
- (ii) 任意の $i \in N$ と任意の $S, T \in 2^N$ に対して

$$i \in S \subset T \Rightarrow x_i^S \leq x_i^T.$$

凸ゲーム上では efficiency と population-monotonicity を満たす配分ルールが存在するので, 任意の凸ゲームは population-monotonic allocation scheme を持つことになる. しかしながら, 任意の準凸ゲームが population-monotonic allocation scheme を持つかどうかという問題はまだ解決されていない (Sprumont [16]). ただし, 4人ゲームに関する Norde and Reijnierse [12] の結果を用いることにより, プレイヤーの数が4人以下であるような任意の準凸ゲームが population-monotonic allocation scheme を持つ, ということは示すことができる. 協力ゲームの分野では「4を知って n を知る」と言われるように, 4人ゲームにおいて成立することは任意の人数のゲームにおいて成立することが多いことが知られている. 以上のことを考慮すると, 次のようなことが成り立つことが予想される.

Conjecture 1. 任意の準凸ゲームは population-monotonic allocation scheme を持つ.

ひとまずこの予想が正しいと仮定すると, 次に問題となるのは, 準凸ゲーム上の配分ルールで efficiency と population-monotonicity を満たすものが存在するか

⁵ v_{k-1} の凸性から v_k も凸となり, S_k が一意に決まることを示すことができる.

どうかということである。現時点で分かっているのは、efficiency と population-monotonicity を満たす準凸ゲーム上の配分ルールの中で、 $v(\{i\}) = 0$ であるような凸ゲームのクラス上では Shapley 配分ルールと Fujishige-Dutta-Ray 配分ルールの凸結合として表される配分ルールと一致するものは存在しないということである (Hokari and Uchida [8]). $v(\{i\}) = 0$ であるような凸ゲームのクラスを定義域とする配分ルールで efficiency と population-monotonicity と symmetry を満たすことが知られているのは、Shapley 配分ルールと Fujishige-Dutta-Ray 配分ルール、およびこの2つの凸結合として表される配分ルールだけであることを考えると、次のような結果が予想される。

Conjecture 2. 準凸ゲーム上の single-valued の配分ルールで efficiency と population-monotonicity という2つの公理を満たすものは存在しない。

凸ゲームに関する2つの予想

$N \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ とし、この4人がゲーム v で表される状況に直面していて、総利得 $v(N)$ をどのように分割するかについて話し合っているとす。いま、ある配分 (x_1, x_2, x_3, x_4) が暫定的に選ばれ、プレイヤー3と4はこの選択に満足して「自分たちはそれぞれ x_3 と x_4 という報酬で誰とでも協力する用意がある」と言い残して話し合いの場から離れたとする。このとき、残されたプレイヤー1と2が直面している状況をこの2人をプレイヤーとするゲームとして表すとどうなるかということを考える。まず2人が協力した場合の総利得は $v(N) - x_3 - x_4$ であると考えることができる。次にプレイヤー1がプレイヤー2の協力なしに得ることのできる利得はどうなるかという、まず自分1人で $v(\{1\})$ を獲得できる。プレイヤー3に協力を頼めば報酬 x_3 を支払った残りの $v(\{1, 3\}) - x_3$ を獲得できるし、同様にプレイヤー4に協力を頼めば $v(\{1, 4\}) - x_4$ を得る。さらにプレイヤー3と4の両方に協力してもらえば $v(\{1, 3, 4\}) - x_3 - x_4$ を獲得できる。したがって、この状況において「プレイヤー1がプレイヤー2の協力なしに獲得できる最大の利得」はこの4つのオプションのうちの最大のものということになる。同様に、この状況において「プレイヤー2がプレイヤー1の協力なしに獲得できる最大の利得」は

$$\max\{v(\{2\}), v(\{2, 3\}) - x_3, v(\{2, 4\}) - x_4, v(\{2, 3, 4\}) - x_3 - x_4\}$$

となる。このようにして得られた $\{1, 2\}$ をプレイヤーの集合とするゲームのことを、もともとのゲーム v の (x_1, x_2, x_3, x_4) と $\{1, 2\}$ に関する max 型縮小ゲームという。この縮小ゲームにおいて (x_1, x_2) という配分が選ばれた場合、もともとのゲームにおける選択と縮小ゲームにおける選択は整合的 (consistent) であるということができる。ある特定の配分ルールを用いたときに、任意のゲームにおける選択がそのゲームの任意の max 型縮小ゲームにおける選択と常に整合的である場合、そ

の配分ルールは max consistency を満たすという.⁶

所与の $N \in \mathcal{N}$ と $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と $x \in \mathbb{R}^N$ と $N' \subset N$ に対して, N' をプレイヤーの集合とするゲーム $\hat{r}_{N'}^x(v)$ を以下のように定義する: 任意の $S \in 2^{N'}$ に対して,

$$\hat{r}_{N'}^x(v)(S) \equiv \begin{cases} \max_{T \subseteq N \setminus N'} \left[v(S \cup T) - \sum_{i \in T} x_i \right] & \text{if } S \neq N', \emptyset, \\ v(N) - \sum_{i \in N \setminus N'} x_i & \text{if } S = N', \\ 0 & \text{if } S = \emptyset. \end{cases}$$

Max consistency: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^N$ と任意の $x \in \varphi(v)$ と任意の $N' \subset N$ に対して,

$$\hat{r}_{N'}^x(v) \in \mathcal{V}_{\text{凸}}^{N'} \text{ かつ } (x_i)_{i \in N'} \in \varphi(\hat{r}_{N'}^x(v)).$$

凸ゲーム上でコアは max consistency を満たし, Fujishige-Dutta-Ray 配分ルールは population-monotonicity と max consistency の両方の公理を満たす. Shapley 配分ルールは population-monotonicity は満たすが max consistency は満たさない. Max consistency は満たすが population-monotonicity は満たさない凸ゲーム上の配分ルールの例としては nucleolus (Schmeidler [13]) が挙げられる. 凸ゲームに関する1つめの予想は次のようなものである.

Conjecture 3. 凸ゲーム上の single-valued の配分ルールの中で efficiency と symmetry と max consistency と population-monotonicity という4つの公理を満たすものがただ1つ存在し, その配分ルールは Fujishige-Dutta-Ray 配分ルールである.

次に, 上で考えたのとは別のタイプの「縮小ゲーム」について考えることにする. $N \equiv \{1, 2, 3, 4\}$ とし, この4人がある共同プロジェクトのようなものを実行しようとしていて, その状況がゲーム v で表され, 総利得 $v(N)$ をどのように分割するかについて4人で話し合っているとする. いま, ある配分 (x_1, x_2, x_3, x_4) が暫定的に選ばれ, プレイヤー3と4はこの選択に満足して, 自分たちがプロジェクトへ参加できること, およびそれぞれ x_3 と x_4 の報酬を受け取ること, の2つのことが保証されるということを条件に話し合いの場から離れたとする.⁷ このとき, 残されたプレイヤー1と2が直面している状況をこの2人をプレイヤーとするゲームとして表すとどうなるかということを考える. まず2人が協力した場合の総利得は $v(N) - x_3 - x_4$ となる. 次にプレイヤー1がプレイヤー2をプロジェクトから排除したとすると $v(\{1, 3, 4\}) - x_3 - x_4$ を獲得することになり, これがこの状況におい

⁶ここで考えているタイプの縮小ゲームを最初に考察したのは Davis and Maschler [1] なので DM-consistency という用語が使われることの方が多い.

⁷前述の max 型縮小ゲームでは, この「プロジェクトへの参加の保証」という条件が無かったことに注意.

て「プレイヤー1がプレイヤー2の協力なしに獲得できる最大の利得」ということになる。同様に、この状況において「プレイヤー2がプレイヤー1の協力なしに獲得できる最大の利得」は、プレイヤー2がプレイヤー1をプロジェクトから排除したときの利得 $v(\{2, 3, 4\}) - x_3 - x_4$ となる。このようにして得られた $\{1, 2\}$ をプレイヤーの集合とするゲームのことを、もともとのゲーム v の (x_1, x_2, x_3, x_4) と $\{1, 2\}$ に関する complement 型縮小ゲームという。この縮小ゲームにおいて (x_1, x_2) という配分が選ばれた場合、もともとのゲームにおける選択と縮小ゲームにおける選択は整合的 (consistent) であるといえることができる。ある特定の配分ルールを用いたときに、任意のゲームにおける選択がそのゲームの任意の complement 型縮小ゲームにおける選択と常に整合的である場合、その配分ルールは complement consistency を満たすという。⁸

所与の $N \in \mathcal{N}$ と $v \in \mathcal{V}_{\square}^N$ と $x \in \mathbb{R}^N$ と $N' \subset N$ に対して、 N' をプレイヤーの集合とするゲーム $r_{N'}^x(v)$ を以下のように定義する: 任意の $S \in 2^{N'}$ に対して、

$$r_{N'}^x(v)(S) \equiv \begin{cases} v(S \cup (N \setminus N')) - \sum_{i \in N \setminus N'} x_i & \text{if } S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if } S = \emptyset. \end{cases}$$

Complement consistency: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\square}^N$ と任意の $x \in \varphi(v)$ と任意の $N' \subset N$ に対して、

$$r_{N'}^x(v) \in \mathcal{V}_{\square}^{N'} \text{ かつ } (x_i)_{i \in N'} \in \varphi(r_{N'}^x(v)).$$

平衡ゲーム (balanced games) というゲームのクラスを定義域とする配分ルールの中で individual rationality と complement consistency を満たすただ1つの配分ルールはコアであることが知られている (Tadenuma [17]). ところが、この結果を証明するために使われているテクニックが定義域を凸ゲームのクラスに限定した場合には使えないことが分かっている。⁹ 凸ゲームに関する2つめの予想はこの点に関わるものである。

Conjecture 4. 凸ゲーム上の配分ルールの中で individual rationality と complement consistency という2つの公理を満たすものがコア以外にも存在する。

補論: Fujishige-Dutta-Ray 配分ルールの explicit な表現と凸ゲームの新たな性質

前述のアルゴリズムによる定義の他に、Fujishige-Dutta-Ray 配分ルールは以下の3つの方法で表現することもできる: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_{\square}^N$ に対して、

⁸ この公理を最初に考察した Moulin [11] は separability という用語を用いている。M-consistency と呼ばれることもある (例えば Tadenuma [17]).

⁹ Hokari and Uchida [9] を参照。

(a) $FDR(v) = \{x \in C(v) \mid \nexists y \in C(v) \setminus \{x\} \text{ s.t. } y \text{ Lorenz-dominates } x\}$;

(b) $FDR(v) = \arg \min_{x \in C(v)} \sum_{i \in N} \left(x_i - \frac{v(N)}{|N|} \right)^2$;

(c) 任意の $i \in N$ に対して, $FDR_i(v) = \max_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \min_{\substack{T \subseteq S \setminus \{i\} \\ S \ni i}} \frac{v(S) - v(T)}{|S| - |T|}$.

ここで (a) と (b) は Fujishige-Dutta-Ray 配分ルールのいわば implicit な表現であるのに対し, (c) は explicit な表現である.¹⁰ この (c) の表現は任意の凸ゲームが次のような性質を持つことを意味する: 任意の $N \in \mathcal{N}$ と任意の $v \in \mathcal{V}_N^N$ に対して,

$$v(N) = \sum_{i \in N} \max_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \min_{\substack{T \subseteq S \setminus \{i\} \\ S \ni i}} \frac{v(S) - v(T)}{|S| - |T|}.$$

この性質は, 2 人ゲームの場合には,

$$v(12) = \max \left\{ v(1), \min \left\{ \frac{v(12)}{2}, v(12) - v(2) \right\} \right\} + \max \left\{ v(2), \min \left\{ \frac{v(12)}{2}, v(12) - v(1) \right\} \right\},$$

3 人ゲームの場合には,

$$\begin{aligned} v(123) = & \max \left\{ \begin{array}{l} v(1), \min \left\{ \frac{v(12)}{2}, v(12) - v(2) \right\}, \min \left\{ \frac{v(13)}{2}, v(13) - v(3) \right\}, \\ \min \left\{ \frac{v(123)}{3}, \frac{v(123)-v(2)}{2}, \frac{v(123)-v(3)}{2}, v(123) - v(23) \right\} \end{array} \right\} \\ & + \max \left\{ \begin{array}{l} v(2), \min \left\{ \frac{v(12)}{2}, v(12) - v(1) \right\}, \min \left\{ \frac{v(23)}{2}, v(23) - v(3) \right\}, \\ \min \left\{ \frac{v(123)}{3}, \frac{v(123)-v(1)}{2}, \frac{v(123)-v(3)}{2}, v(123) - v(13) \right\} \end{array} \right\} \\ & + \max \left\{ \begin{array}{l} v(3), \min \left\{ \frac{v(13)}{2}, v(13) - v(1) \right\}, \min \left\{ \frac{v(23)}{2}, v(23) - v(2) \right\}, \\ \min \left\{ \frac{v(123)}{3}, \frac{v(123)-v(1)}{2}, \frac{v(123)-v(2)}{2}, v(123) - v(12) \right\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と書くことができるのだが, このような一見成り立ちそうも無い不思議な等式が任意の凸ゲームについて成り立つのは何故なのかという問題は, 純粋に数学の問題としても興味深いものなのではないかと思われるのだがどうか。

参考文献

- [1] Morton Davis and Michael Maschler. The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly*, 12:223–259, 1965.
- [2] Theo S. H. Driessen and Holger Meinhardt. (Average-)convexity of common pool and oligopoly TU-games. *International Game Theory Review*, 3:141–158, 2001.

¹⁰(c) の表現の証明については Hokari [6] を参照。

- [3] Bhaskar Dutta. The egalitarian solution and reduced game properties in convex games. *International Journal of Game Theory*, 19:153–169, 1990.
- [4] Bhaskar Dutta and Debraj Ray. A concept of egalitarianism under participation constraints. *Econometrica*, 57:615–635, 1989.
- [5] Satoru Fujishige. Lexicographically optimal base of a polymatroid with respect to a weight vector. *Mathematics of Operations Research*, 5:186–196, 1980.
- [6] Toru Hokari. Population monotonic solutions on convex games. *International Journal of Game Theory*, 29:327–338, 2000.
- [7] Toru Hokari and Anita van Gellekom. Population monotonicity and consistency in convex games: some logical relations. *International Journal of Game Theory*, 31:593–607, 2002.
- [8] Toru Hokari and Seigo Uchida. Non-existence of population-monotonic solutions on the domain of quasi-convex games. mimeo.
- [9] Toru Hokari and Seigo Uchida. Consistency and the core on three subclasses of balanced games. mimeo.
- [10] Elena Iñarra and José M. Usategui. The Shapley value and average convex games. *International Journal of Game Theory*, 22:13–29, 1993.
- [11] Hervé Moulin. The separability axiom and equal sharing methods. *Journal of Economic Theory*, 36:120–148, 1985.
- [12] Henk Norde and Hans Reijnierse. A dual description of the class of games with a population monotonic allocation scheme. *Games and Economic Behavior*, 41:322–343, 2002.
- [13] David Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17:1163–1170, 1969.
- [14] Lloyd S. Shapley. A value for n -person games. In H. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Contributions to the Theory of Games*, volume 2, pages 307–317. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.
- [15] Lloyd S. Shapley. Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1:11–26, 1971.

- [16] Yves Sprumont. Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility. *Games and Economic Behavior*, 2:378–394, 1990.
- [17] Koichi Tadenuma. Reduced games, consistency, and the core. *International Journal of Game Theory*, 20:325–334, 1992.
- [18] William Thomson. Population-monotonic allocation rules. W. A. Barnett et. al (eds.) *Social Choice, Welfare and Ethics*, Cambridge UP, pp. 79–124.
- [19] Donald M. Topkis, *Supermodularity and Complementarity*. Princeton UP, 1998.